КОНТРАМОДУЛИ, КОНТРАПРОИЗВОДНЫЕ КАТЕГОРИИ И КОНТРАГЕРЕНТНЫЕ КОПУЧКИ

ЛИСТОК 2: КО- И КОНТРАМОДУЛИ НАД КОКОЛЬЦАМИ И КОАЛГЕБРАМИ

Весна 2014 года [версия от 5 февраля]

(Коассоциативное) кокольцо $\mathcal{C}$ над некоммутативным кольцом A — это A-A-бимодуль, снабженный отображениями коумножения $\mu\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}\otimes_A \mathcal{C}$ и коединицы $\varepsilon\colon \mathcal{C}\longrightarrow A$, являющимися гомоморфизмами A-A-бимодулей и удовлетворяющими обычным уравнениям коассоциативности и коединицы. Это значит, что две композиции $\mathcal{C}\longrightarrow \mathcal{C}\otimes_A\mathcal{C} \rightrightarrows \mathcal{C}\otimes_A\mathcal{C}\otimes_A\mathcal{C}$ отображения μ с двумя отображениями, индуцированными μ, должны быть равны между собой, а обе композиции $\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}\otimes_A\mathcal{C}\rightrightarrows\mathcal{C}$ отображения μ с двумя отображениями, индуцированными ε, должны быть равны тождественному отображению $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$.

Левый комодуль $\mathcal{M}$ над кокольцом $\mathcal{C}$ — это левый A-модуль, снабженный отображением кодействия $\nu\colon \mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{C}\otimes_A\mathcal{M}$, являющимся гомоморфизмом левых A-модулей и удовлетворяющим обычным уравнениям коассоциативности и коединицы. Это значит, что две композиции $\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{C}\otimes_A\mathcal{M}\rightrightarrows\mathcal{C}\otimes_A\mathcal{C}\otimes_A\mathcal{M}$ отображения ν с отображениями, индуцированными μ и ν, должны быть равны между собой, а композиция $\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{C}\otimes_A\mathcal{M}\longrightarrow A\otimes_A\mathcal{M}\simeq\mathcal{M}$ отображения ν и отображения, индуцированного ε, должна быть равна тождественному отображению $\mathrm{id}_{\mathcal{M}}$. Правый $\mathcal{C}$-комодуль $\mathcal{N}$ — это правый A-модуль, снабженный отображением кодействия $\nu\colon\mathcal{N}\longrightarrow\mathcal{N}\otimes_A\mathcal{C}$, удовлетворяющим аналогичным уравнениям.

Аддитивные категории левых и правых $\mathcal{C}$-комодулей обозначаются через $\mathcal{C}$–comod и comod–$\mathcal{C}$, соответственно. Абелева группа гомоморфизмов левых $\mathcal{C}$-комодулей $\mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{M}$ обозначается через $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{L},\mathcal{M})$. Абелевы категории левых и правых A-модулей обозначаются A–mod и mod–A. Абелева группа гомоморфизмов левых A-модулей $L\longrightarrow M$ обозначается $\mathrm{Hom}_A(L,M)$, и абелева группа гомоморфизмов правых A-модулей $N\longrightarrow R$ обозначается $\mathrm{Hom}_{A^{\mathrm{op}}}(N,R)$.

Левый контрамодуль $\mathfrak{P}$ над кокольцом $\mathcal{C}$ — это левый A-модуль, снабженный отображением контрадействия $\pi\colon \mathrm{Hom}_A(\mathcal{C},\mathfrak{P})\longrightarrow\mathfrak{P}$, являющимся гомоморфизмом левых A-модулей и удовлетворяющим следующим уравнениям контраассоциативности и коединицы. Две композиции $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{C}\otimes_A\mathcal{C},\,\mathfrak{P})\simeq\mathrm{Hom}_A(\mathcal{C},\mathrm{Hom}_A(\mathcal{C},\mathfrak{P}))\rightrightarrows\mathrm{Hom}_A(\mathcal{C},\mathfrak{P})\longrightarrow\mathfrak{P}$ отображений, индуцированных μ и π, с отображением π должны быть равны между собой. Композиция $\mathfrak{P}\simeq\mathrm{Hom}_A(A,\mathfrak{P})\longrightarrow\mathrm{Hom}_A(\mathcal{C},\mathfrak{P})\longrightarrow\mathfrak{P}$ отображения, индуцированного ε, с отображением π, должна быть равна тождественному отображению $\mathrm{id}_{\mathfrak{P}}$.

Аддитивная категория левых $\mathcal{C}$-контрамодулей обозначается через $\mathcal{C}$–contra. Абелева группа гомоморфизмов левых $\mathcal{C}$-контрамодулей $\mathfrak{P}\longrightarrow\mathfrak{Q}$ обозначается $\mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(\mathfrak{P},\mathfrak{Q})$. Аналогичным образом определяется аддитивная категория правых $\mathcal{C}$-контрамодулей contra–$\mathcal{C}$.

Задача 0. Пусть $\mathcal{N}$ — правый $\mathcal{C}$-комодуль, на котором действует слева $\mathcal{C}$-комодульными эндоморфизмами кольцо B, и пусть V — левый B-модуль. Постройте структуру левого $\mathcal{C}$-контрамодуля на абелевой группе $\mathrm{Hom}_B(\mathcal{N}, V)$.

Задача 1. а) Левым $\mathcal{C}$-комодулем, коиндуцированным с левого A-модуля U, называется левый $\mathcal{C}$-комодуль $\mathcal{C} \otimes_A U$. Для любого левого $\mathcal{C}$-комодуля $\mathcal{M}$, постройте изоморфизм абелевых групп $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\ \mathcal{C} \otimes_A U) \simeq \mathrm{Hom}_A(\mathcal{M}, U)$.

б) Левым $\mathcal{C}$-контрамодулем, индуцированным с левого A-модуля V, называется левый $\mathcal{C}$-контрамодуль $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{C}, V)$. Для любого левого $\mathcal{C}$-комодуля $\mathfrak{P}$, постройте изоморфизм абелевых групп $\mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(\mathrm{Hom}_A(\mathcal{C}, V), \mathfrak{P}) \simeq \mathrm{Hom}_A(V, \mathfrak{P})$.

(Указание: придумайте одновременное обобщение утверждений а) и б) на категорном языке (тензорных и модульных категорий, или монад и т.п.), и докажите это общее категорное утверждение.)

Задача 2. Для любого кокольца $\mathcal{C}$ над ассоциативным кольцом A, постройте эквивалентность между аддитивными категориями коиндуцированных левых $\mathcal{C}$-комодулей и индуцированных левых $\mathcal{C}$-контрамодулей.

Задача 3. а) Покажите, что в аддитивной категории левых $\mathcal{C}$-комодулей существуют коядра всех морфизмов и произвольные ("малые") бесконечные прямые суммы (копроизведения), и что коядра и бесконечные прямые суммы сохраняются забывающим функтором $\mathcal{C}\text{–}\mathsf{comod} \longrightarrow A\text{–}\mathsf{mod}$.

б) Покажите, что в аддитивной категории левых $\mathcal{C}$-контрамодулей существуют ядра всех морфизмов и произвольные бесконечные произведения, и что те и другие сохраняются забывающим функтором $\mathcal{C}\text{–}\mathsf{contra} \longrightarrow A\text{–}\mathsf{mod}$.

Задача 4. а) Покажите, что категория $\mathcal{C}\text{–}\mathsf{comod}$ абелева, если кокольцо $\mathcal{C}$ является плоским правым A-модулем. Наоборот, предположим, что категория $\mathcal{C}\text{–}\mathsf{comod}$ абелева и забывающий функтор $\mathcal{C}\text{–}\mathsf{comod} \longrightarrow A\text{–}\mathsf{mod}$ точен; покажите, что в этом случае $\mathcal{C}$ является плоским правым A-модулем.

б) Покажите, что категория $\mathcal{C}\text{–}\mathsf{contra}$ абелева, если кокольцо $\mathcal{C}$ является проективным левым A-модулем. Наоборот, предположим, что категория $\mathcal{C}\text{–}\mathsf{contra}$ абелева и забывающий функтор $\mathcal{C}\text{–}\mathsf{contra} \longrightarrow A\text{–}\mathsf{mod}$ точен; покажите, что в этом случае $\mathcal{C}$ является проективным левым A-модулем.

(Указание: для доказательства утверждений, начинающихся с "наоборот", используйте общие результаты о свойствах точности сопряженных функторов.)

Задача 5. а) Для любого кокольца $\mathcal{C}$ над кольцом A, постройте структуры колец на абелевых группах $B' = \mathrm{Hom}_A(\mathcal{C}, A)$ и $B'' = \mathrm{Hom}_{A^{\mathrm{op}}}(\mathcal{C}, A)$ гомоморфизмов левых и правых A-модулей $C \longrightarrow A$ таким образом, чтобы существовали естественные гомоморфизмы колец $A \longrightarrow B'$ и $A \longrightarrow B''$.

б) Из каждой из категорий левых и правых $\mathcal{C}$-комодулей и левых и правых $\mathcal{C}$-контрамодулей постройте естественный функтор в категорию левых или правых модулей над кольцом B' или B''. Когда кокольцо $\mathcal{C}$ является конечно-порожденным проективным левым и правым A-модулем, все четыре получившихся функтора должны быть эквивалентностями категорий.

Задача 6. а) Предполагая, что кокольцо $\mathcal{C}$ является плоским правым A-модулем, а кольцо A нетерово слева (т.е., возрастающие цепочки левых идеалов в A стабилизируются), покажите, что всякий левый $\mathcal{C}$-комодуль является объединением своих $\mathcal{C}$-подкомодулей, являющихся конечно-порожденными левыми A-модулями.

б*) Докажите то же заключение, исходя из посылки, что кокольцо $\mathcal{C}$ является проективным правым A-модулем (но кольцо A произвольное).

Коалгеброй обычно называется кокольцо $\mathcal{C}$ над коммутативным кольцом A, такое что структуры левого и правого A-модуля на $\mathcal{C}$ совпадают.

Задача 7. а) Постройте коалгебру $\mathcal{C}$ над кольцом целых чисел $A = \mathbb{Z}$ так, чтобы категория левых $\mathcal{C}$-комодулей была эквивалентна категории пар абелевых групп M_1 и M_2, снабженных гомоморфизмом абелевых групп $M_1 \longrightarrow M_2/nM_2$, где $n \geqslant 2$ — натуральное число. *Покажите, что в этой категории существуют ядра и коядра произвольных морфизмов, но она не абелева.

б) Постройте коалгебру $\mathcal{C}$ над кольцом целых чисел $A = \mathbb{Z}$ так, чтобы ($\mathcal{C}$ была плоским $\mathbb{Z}$-модулем и при этом) категория левых $\mathcal{C}$-контрамодулей была эквивалентна категории пар абелевых групп P_1 и P_2, снабженных гомоморфизмом абелевых групп $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, P_1) \longrightarrow P_2$. *Покажите, что в этой категории существуют ядра и коядра произвольных морфизмов, но она не абелева.

Задача 8. а) Предполагая, что кокольцо $\mathcal{C}$ над ассоциативным кольцом A является плоским правым A-модулем, покажите, что в категории левых $\mathcal{C}$-комодулей существуют произвольные бесконечные произведения. Приведите контрпример, показывающий, что функторы бесконечных произведений в категории $\mathcal{C}$-комодулей могут не быть точными.

б) Предполагая, что $\mathcal{C}$ является проективным левым A-модулем, покажите, что в категории левых $\mathcal{C}$-контрамодулей существуют произвольные бесконечные прямые суммы. *Приведите контрпример, показывающий, что функторы бесконечных прямых сумм в категории $\mathcal{C}$-контрамодулей могут не быть точными.

(Указания: вычислите сначала бесконечное произведение семейства коиндуцированных $\mathcal{C}$-комодулей и бесконечную прямую сумму семества индуцированных $\mathcal{C}$-контрамодулей. Чтобы вычислить бесконечное произведение семейства произвольных $\mathcal{C}$-комодулей, представьте каждый из них в виде ядра морфизма коиндуцированных $\mathcal{C}$-комодулей. Чтобы вычислить бесконечную прямую сумму семейства произвольных $\mathcal{C}$-контрамодулей, представьте каждый из них в виде коядра морфизма индуцированных $\mathcal{C}$-контрамодулей.

Для построения контрпримеров, рассмотрите коалгебру над полем, двойственную к топологической алгебре формальных степенных рядов Тейлора от одной переменной в пункте а) и от двух переменных в пункте б).)

в**) В работе M. Barr, "Coequalizers and free triples", *Mathematische Zeitschift* **116**, 1970 показано, что в категории контрамодулей над любым кокольцом $\mathcal{C}$

существуют произвольные прямые пределы (т.е, в частности, коядра и бесконечные прямые суммы). Существуют ли произвольные обратные пределы (ядра и бесконечные произведения) в категории комодулей над любым кокольцом $\mathcal{C}$?

Задача 9. а) Предполагая, что кокольцо $\mathcal{C}$ является плоским правым A-модулем, покажите, что левые $\mathcal{C}$-комодули $\mathcal{C} \otimes_A J$, коиндуцированные с инъективных левых A-модулей J, являются инъективными объектами абелевой категории $\mathcal{C}$–comod. Покажите, что инъективных объектов в этой категории достаточно много, и что всякий инъективный левый $\mathcal{C}$-комодуль является прямым слагаемым левого $\mathcal{C}$-комодуля, коиндуцированного с инъективного левого A-модуля.

б) Свободным левым $\mathcal{C}$-контрамодулем с множеством образующих X называется левый $\mathcal{C}$-контрамодуль $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{C}, A[X])$, индуцированный со свободного левого A-модуля $A[X]$ с тем же множеством образующих. Предполагая, что кокольцо $\mathcal{C}$ является проективным левым A-модулем, покажите, что свободные левые $\mathcal{C}$-контрамодули являются проективными объектами абелевой категории $\mathcal{C}$–contra. Покажите, что проективных объектов в этой категории достаточно много, и что всякий проективный левый $\mathcal{C}$-контрамодуль является прямым слагаемым свободного.

Задача 10. Для любой коалгебры $\mathcal{C}$ над полем k, постройте эквивалентность между аддитивными категориями инъективных левых $\mathcal{C}$-комодулей и проективных левых $\mathcal{C}$-контрамодулей.